ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Газилова А.Т.

Бакинский Государственный Университет, Баку Азербайджан
e-mail: aydan-9393@list.ru

Резюме: В работе получены условия регулярной разрешимости одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка квазиэллиптического типа. Эти условия разрешимости выражены только свойствами коэффициентов данного операторно-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, самосопряженный оператор, регулярная разрешимость, операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача.

AMS Subject Classification: 34B40, 35125, 47D03

1.Введение

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A-положительно определенный самосопряженный оператор в H.

Обозначим через H_γ $(\gamma \geq 0)$ гильбертово пространство со скалярным произведением $(x,y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$ при $x, y \in D(A^\gamma)$. Предполагаем, что $H_0 = H$.

Пусть $L_2(R_+;H)$ есть гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$, определенных в интервале $R_+ = (0,\infty)$ почти всюду, со значениями в гильбертовом пространстве H с нормой

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty$$

Далее введем гильбертово пространство [3]

$$W_2^3(R_+;H) = \left\{ u : A^3 u \in L_2(R_+;H), \frac{d^3u}{dt^3} \in L_2(R_+;H) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} = \left(\left\|A^3 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\frac{d^3u}{dt^3}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

Из теоремы о следах $[1]$ следует, что

$$\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H) = \{u;\ u \in W_2^3(R_+;H),\ u(0)=0, u'(0)=0,\ u''(0)=0\}$$

и

$$\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H;1) = \{u;\ u \in W_2^3(R_+;H),\ \ u'(0)=0\}$$

также являются полными гильбертовыми подпространствами пространства $W_2^3(R_+;H)$. Аналогично вводится гильбертово пространство $W_2^3(R;H)$, где $R=(-\infty;\infty)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)\left(\frac{d}{dt}-A\right)^2 u(t) + A_1\frac{d^2u}{dt^2} + A_2\frac{du}{dt} = f(t),\ t\in(R_+;H) \qquad (1)$$

$$u'(0)=0, \qquad (2)$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям

1) A- положительно определенный самосопряженный оператор в H ;

2) операторы A_1 и A_2 линейны, причем $B_1 = A_1A^{-1}$, $B_2 = A_2A^{-2}$ ограниченные операторы в H .

Определение 1. Если вектор-функция $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, то она называется регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), которое удовлетворяет краевому условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\left\|A^{3/2}u'(t)\right\| = 0$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

то задача (1), (2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе найдено условие регулярной разрешимости задачи (1),(2), выраженное свойствами коэффициентов уравнения (1).

Отметим, что уравнение (1) с краевым условием $u(0)=0$ исследовано в работе $[2]$. Далее, операторно-дифференциальные уравнения и разные краевые задачи для операторного уравнение третьего порядка рассмотрены в работах $[3-6]$.

В работах $[5]$ и $[4]$оценены нормы операторов промежуточных производных в пространствах $W_2^3(R;H)$ и $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$.

Для исследования краевую задачу обозначим через

$$P_0(d/dt)_u = \left(\frac{d}{dt}+A\right)\left(\frac{d}{dt}-A\right)^2 u(t)$$

и

$$P_1(d/dt)u = A_1\frac{d^2u}{dt^2}+A_2\frac{du}{dt},$$

$$Pu = P_0u + P_1u,\ u \in W_2^3(R_+;H).$$

Основные результаты. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1), 2). Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_2^3(R_+;H;1)$ на $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Уравнение $P_0(d/dt)u(t)=0$ имеет общее решение в пространстве $W_2^3(R_+;H)$ в виде $u_0(t)=e^{-At}x$, где $x \in H_{5/2}, ae^{-At}$. Здесь есть полугруппа, порожденная оператором $-A$. Из условия $u'(0)=0$ следует, что - $Ax=0$, т.е $x=0$, таким образом $KerP_0=\{0\}$. Покажем, что образ оператора P_0 совпадает с пространством $L_2(R_+;H)$. Действительно, при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$ вектор-функция

$$u_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\xi+A)^{-1}(i\xi-A)^{-2}\int_0^{\infty} f(s)e^{i(t-s)\xi}dsd\xi,\quad t\in R_+$$

удовлетворяет уравнению $P_0(d/dt)u(t)=f(t)$ при $t\in R_+$ почти всюду. Далее из теоремы Планшереля следует, что $u(t)\in W_2^3(R;H)$, поскольку

$$\left\|A^3 u_1\right\|_{L_2(R;H)} \le \sup_{\zeta \in R}\left\|A^3(i\xi + A)^{-1}(i\xi - A)^{-2}\right\| \cdot \|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

$$\left\|\frac{d^3 u_1}{dt^3}\right\|_{L_2(R;H)} \le \sup_{\zeta \in R}\left\|A^3(i\xi + A)^{-1}(i\xi - A)^{-2}\right\|\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

С другой стороны, по спектральной теореме

$$\left\|A^3(i\xi + A)^{-1}(i\xi + A)^{-1}\right\| \le \sup_{\mu \in \sigma(A)}\left|\mu^3(i\xi + \mu)^{-1}(i\xi - \mu)^{-1}\right| \le const,$$

т.е., $A^3 u_1 \in L_2(R;H)$.

Аналогично имеем, что $\frac{d^3 u_1}{dt^3} \in L_2(R;H)$. Следовательно, $u_1(t) = u_1(t) + e^{-tA}x$, $x \in H_{5/2}$. Отсюда следует, что $x = A^{-1}u_1(0) \in H_{3/2}$. Следовательно, уравнение (1) имеет решение при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$.
С другой стороны, из теоремы о промежуточных производных $\|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} \le const\|u\|_{L_2(R_+;H)}$. Тогда, применяя теорему Банаха об обратном операторе, мы получаем утверждение теоремы.

Докажем следующую важную лемму

Лемма 1. Пусть $\beta \in \left(0, \frac{27}{4}\right)$. Тогда операторный пучок

$$P_j(\lambda;\beta;A) = P_0(\lambda, A) \cdot P_0(\lambda, A) - \beta(i\lambda)^{2j} A^{6-2j} \quad j = 1,2 \tag{3}$$

представляется в виде

$$F_j(\lambda;\beta;A) = F_j(\lambda;\beta;A)\, F_j(-\lambda;\beta;A), \tag{4}$$

причем

$$F_j(\lambda;\beta;A) = \prod_{k=1}^{4}\left(\lambda E - \omega_{k,j}(\beta)A\right) = \sum_{k=0}^{4} a_{kj}(\beta)\lambda^k A^{3-k}, \tag{5}$$

где $\operatorname{Re}\omega_{k,j}(\beta) < 0$ все числа $a_{k,j}(\beta)$ положительны и удовлетворяют условиям:

$$a_{11}^2(\beta) - 2a_{12}(\beta) = 3 - \beta,\ a_{12}^2(\beta) = 2a_{11}(\beta)\ , \text{ при } \ j = 1 \tag{6}$$

$$a_{12}^2(\beta) - 2a_{22}(\beta),\ a_{22}^2(\beta) - 2a_{12}(\beta) = 3 - \beta\ , \text{ при } \ j = 2. \tag{7}$$

Доказательство. $\mu \in \sigma(A)$ и $\lambda = i\xi, \xi \in R$. Характеристическое уравнение

$$P_j(i\xi,\beta,\mu)=\left(\xi^2+\mu^2\right)\left(\xi^2+\mu^2\right)^2\left(1-\beta\sup_{\xi}\frac{\xi^{2j}}{\left(\xi^2+\mu^2\right)\left(\xi^2+\mu^2\right)^2}\right)>\left(\xi^2+\mu^2\right)^3\left(1-\beta\cdot\frac{4}{27}\right)>0\cdot$$

Следовательно, $P_j(\lambda,\beta,\mu)$ не имеет корней на минимальной оси. Тогда

$$F_j(\lambda,\beta;\mu)=\prod_{k=1}^{4}\left(\lambda E-\omega_{k,j}(\beta)\mu\right)=\sum_{k=0}^{4}a_{kj}(\beta)\lambda^j\mu^{3-j},$$

где $\operatorname{Re}\omega_{k,j}(\beta)<0,\ a_{0,j}(\beta)=1,\ \ a_{k,j}(\beta)=1$ и $a_{k,j}(\beta)>0,\ j=1{,}2$. Так как корни уравнения $P_0(\lambda;\beta;\mu)=0$ симметричны относительно начала координат, то имеем $P_j(\lambda;\beta;\mu)=F_j(\lambda;\beta;\mu)\cdot F_j(-\lambda;\beta;\mu)$. Тогда из спектрального размножения оператора A получаем равенство (4). Равенства (6) и (7) следуют из (4) при сравнениях коэффициентов. Лемма доказана.

Лемма 2. при $\beta\in\left(0,\dfrac{27}{4}\right)$ и $u\in W_2^3(R_+;H;1)$ имеет место равенство

$$\left\|P_0u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}-\beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|F_J(d/dt;\beta;A)u\right\|_{L_2(R_+;H)}+S_j(\beta)(\tilde\varphi;\tilde\varphi),\quad (8)$$

где $\tilde\varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\ \varphi_j\in H_{3-j-1/2},\ j=0{,}2$, а

$$S_j(\beta)=\begin{pmatrix}a_{1,j}(\beta)+1, & 0\\ 0 & a_{2,j}(\beta)+1\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $u\in W_2^3(R_+;H;1)\ \ (u'(0)=0)$. Тогда

$$\left\|F_1(d/dt;\beta;A)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|\frac{d^3u}{dt^3}+a_{1,j}A^2\frac{du}{dt}+a_{2,j}A\frac{d^2u}{dt^2}+A^3u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left\|\frac{d^3u}{dt^3}\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+a_{21}^2\left\|Au''\right\|^2+a_{1,j}^2\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|A^3u\right\|^2+2\operatorname{Re}\left(u''',A^3u\right)_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+2\operatorname{Re}a_{1,j}\left(\frac{d^3u}{dt^3},A^2\frac{du}{dt}\right)_{L_{2(R_+;h)}}+2\operatorname{Re}a_{ij}\left(\frac{d^3u}{dt^3},A\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{L_{2(R_+;h)}}+\quad (9)$$

$$+2\operatorname{Re}a_{2,j}\cdot a_{1,j}\left(A\frac{d^2u}{dt^2},A^2\frac{du}{dt}\right)_{L_2(R_+H)}+2\operatorname{Re}a_{21}\left(\frac{d^2u}{dt^2},A^3u\right)_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+2\operatorname{Re} a_{1,j}\left(Au', A^3u\right)_{L_2(R_+;H)}.$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая, что $u'(0)=0$ получаем:

$$2\operatorname{Re}\left(u''', A^3u\right) = -(\varphi_2, \varphi_0),\ 2\operatorname{Re}\left(u''', A^2u'\right) = -2\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

$$2\operatorname{Re}\left(u''', Au''\right)_{L_2(R_+;H)} = -2\left\|\varphi_2\right\|^2,\ 2\operatorname{Re}\left(Au'', A^2u\right)_{L_2(R_+;H)}$$

$$2\operatorname{Re}\left(Au'', A^2u\right)_{L_2(R_+;H)} = -\left\|A^2u'\right\|_{L_2(R_+;H)},\ 2\operatorname{Re}\left(A^2u'; A^2u\right) = -\left\|\varphi_0\right\|^2$$

Учитывая эти выражения в (9), получаем, что

$$\left\|F_1(d/dt;\beta;A)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|u'''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + (a_{2,j}-2a_{1,j})\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$\left(a_{1,j}-2a_{2j}\right)\left\|A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \left(Q,(\beta)\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\right), \qquad (10)$$

где

$$Q_j(\beta) = \begin{pmatrix} a_{1,j}(\beta) & 1 \\ 1 & a_{2j}(\beta) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, имеем:

$$\begin{aligned}\left\|P_0(d/dt)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} &= \left\|u'''\right\|^2 + \left\|A^3u\right\|^2 + 3\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \\ &+ 3\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - Q_0(\beta)(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})\end{aligned}, \qquad (11)$$

где

$$Q_0(\beta) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, учитывая равенства (6) и (9) в равенстве (10) с учетом (11) получаем:

$$\begin{aligned}&\left\|P_0(d/dt)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|F_j(d/dt;\beta;A)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \\ &+\left(Q_j(\beta) - Q_0(\beta)(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})\right) = \left\|F_j(d/dt;\beta;A)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left(S_j(\beta)\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\right)\end{aligned}$$

.

Теорема доказана. Используя эту теорему, докажем

Теорема 2. При всех $u \in W_2^3(R_+;H;1)$ имеют место неравенства:

$$\left\|A^2u'\right\| \le \left(\frac{4}{27}\right)^{1/2}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2(R_+;H)},$$

$$\left\|Au'''\right\|_{L_2(R_+:H)} \le \left(\frac{4}{27}\right)^{1/2} \left\|P_0 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

Доказательство. Так как $\left(S_j(\beta)\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\right) > 0$ $\left(a_{1,j} > 0\right)$, где $\varphi = (\varphi_0, \varphi_2)$, $\varphi_0 = A^{5/2}u(0)$, $\varphi_2 = A^{1/2}\varphi_2$, то из леммы 2 следует, что при $\beta \in \left(0, \frac{27}{4}\right)$

$$\left\|P_0(d/dt)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\| = F_j(d/dt;\beta;A)u + \left(S;(\beta)\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\right) > 0,$$

$$u \in W_2^3(R_+;H;1),$$

т.е. при $\beta \in \left(0, \frac{27}{4}\right)$ и $u \in W_2^3(R_+;H;1)$ имеет место неравенство

$$\left\|P(d/dt)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2 > 0,$$

тогда переходя к пределу при $\beta \to \frac{27}{4}$ получаем, что

$$\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left(\frac{4}{27}\right)^{1/2} \left\|P_0(d/dt)u\right\|_{L_2(R_+;H)} \quad j = 1,2.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$\alpha = \left(\frac{4}{27}\right)^{1/2} \left\|A_1A^{-1}\right\| + \left\|A_2A^{-2}\right\| < 1.$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде уравнения
$Pu = P_0u + P_1u = f$, где $u \in W_2^3(R_+;H;1)$, $f \in L_2(R_+;H)$.

По теореме 1 оператор P_0^{-1} имеет ограниченный обратный, действующий из $L_2(R_+;H)$, но $u \in W_2^3(R_+;H;1)$. Тогда получаем уравнение $\omega + P_1P_0^{-1}\omega = f$ в $L_2(R_+;H)$, где $\omega = P_0^{-1}u$, с другой стороны при $\omega \in L_2(R_+;H)$

$$\left\|P_1P_0^{-1}\omega\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|P_1\omega\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left\|A_1\omega''\right\|_{L_2(R_+;H)} + \left\|A_2\omega'\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \left\|A_1A^{-2}\right\| \cdot \left\|Au''\right\|_{L_2(R_+;H)} + \left\|A_2A^{-2}\right\| \left\|A^2\omega'\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Применяя теорему 2, получаем, что

$$\left\|P_1P_0^{-1}u\right\|_{L_2(R_+;H)}\left\|A_1A^{-1}\right\|\left(\frac{4}{27}\right)^{1/2}\left\|P_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}+\left\|A_2A^{-2}\right\|\left(\frac{4}{27}\right)^{1/2}\left\|P_0\omega\right\|_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left(\frac{4}{27}\right)^{1/2}\left(\left\|A_1A^{-1}\right\|+\left\|A_2A^{-2}\right\|\right)\left\|P_0\omega\right\|_{L_2(R_+;H)}<\alpha\left\|P_0\omega\right\|_{L_2(R_+;H)},$$

где $0<\alpha<1$. Тогда оператор $E+P_1P_0^{-1}$ обратим и

$$u=P_0^{-1}\omega=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f\ .$$

Отсюда следует, что $\left\|u\right\|_{W_2^3(R_+;H)}\le const\left\|f\right\|_{L_2(R_+;H)}$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. С. С. Мирзоеву за постановку задачи и полезные советы.

Литература.

1. Mirzoev S.S., Heydarova S.B. On a boundary-value problem for third order operator-differential equations on a finitle interval, Applied Mathematical Scienses,2016, V.10, №12,p p.543-548.
2. Mirzoev S.S., Gazilova A.T. On the Completeness of a Part of Root Vectors for a Class of Third-Order Quasi-Elliptic Operator Pencils, Mathematical Notes, 2019, V. 105, N. 5, pp. 162–165.
3. Алиев А.Р. О разрешимости краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка, Успехи мат. наук, 2005, Т.60, №4 (364), с.215-216.
4. Газилова А.Т. О неравенствах Колмогоровского типа, Известия БГУ, 2019, №1, с. 93-98.
5. Газилова А.Т. Об оценке нормы промежуточных производных через норму операторно-дифференциального выражения третьего порядка квазиэллиптического типа, Journal of Contemporary Applied Mathematics 2018 , V.8, № 1, pp 19-24
6. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные краевые задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
7. Мирзоев С.С., Газилова А.Т. О регулярной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой на всей оси, Известия БГУ,, 2016, №3, с. 23-29.
8. Мирзоев С.С., Гейдарова С.Б. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка на конечном отрезке, Proceedings of IAM, 2015, V.4, №2, pp. 26-39.

ON SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER OF QUASI ELLIPTIC TYPE

Qazilova A.T.
Baku State University, Baku, Azerbaijan

SUMMARY

Abstact: In the work the conditions of coefficients of one class of a boundary-value problem for operator-differential equations of the third-order of quasielliptic type are obtained, which provide regular solvability.

Key words: Hilbert space, self-adjoint operator, regular solvability, operator-differential equation, boundary value problem

REFERENCES

1. Mirzoev S.S., Heydarova S.B. On a boundary-value problem for third order operator-differential equations on a finitle interval, Applied Mathematical Scienses,2016, V.10, №12, p.543-548.
2. Mirzoev S.S., Gazilova A.T. On the Completeness of a Part of Root Vectors for a Class of Third-Order Quasi-Elliptic Operator Pencils, Mathematical Notes, 2019, V. 105, N. 5, pp. 162–165.
3. Aliev A.R. O razreshimosti kraevoj zadachi dlja odnogo klassa operatorno-differencial'nyh uravnenij tret'ego porjadka, Uspehi mat. nauk, 2005, T.60, №4 (364), s.215-216. (Aliev A.R. On the solvability of a boundary value problem for a class of operator-differential equations of the third order, Successes of Mathematical Sciences, 2005, vol. 60, no. 4 (364))
4. Gazilova A.T. O neravenstvah kolmogorovskogo tipa, Izvestija BGU, 2019, №1, c. 93-98. (Gazilova A.T. On Kolmogorov-type inequalities, Izvestija BGU, 2019, N. 1, pp. 93-98.)
5. Gazilova A.T. Ob ocenke normy promezhutochnyh proizvodnyh cherez normu operatorno-differencial'nogo vyrazhenija tret'ego porjadka kvazijellipticheskogo tipa, Journal of Contemporary Applied Mathematics 2018 ,V.8,№ 1,p 19-24 (Gazilova A.T. On an estimate of the norm of intermediate derivatives in terms of the norm of a third-order operator-differential expression of quasielliptic type, Journal of Contemporary Applied Mathematics 2018, V.8, No. 1, p 19-24)
6. Lions Zh.L., Madzhenes Je. Ne odnorodnye kraevye zadachi i ih prilozhenija. M.: Mir, 1971, 371 s. (Lyons J.L., Magenes E.

Inhomogeneous boundary value problems and their applications. M .: Mir, 1971, 371 p.)

7. Mirzoev S.S., Gazilova A.T. O reguljarnoj razreshimosti odnogo klassa operatorno-differencial'nyh uravnenij tret'ego porjadka s kratnoj harakteristikoj na vsej osi, Izvestija BGU, 2016, №3, c. 23-29. (Mirzoev S.S., Gazilova A.T. On the regular solvability of one class of operator-differential equations of the third order with multiple characteristics on the whole axis, Izvestija BGU, 2016, No. 3, p. 23-29.)
8. Mirzoev S.S., Gejdarova S.B. O razreshimosti odnoj kraevoj zadachi dlja operatorno-differencial'nyh uravnenij tret'ego porjadka na konechnom otrezke, Proceedings of IAN, 2015, V.4, №2, pp.26-39.(Mirzoev S.S., Heydarova S.B. On the solvability of a boundary value problem for third-order operator-differential equations on a finite interval, Proceedings of IAM, 2015, V.4, No. 2, pp.26-39.)